DEVOIR FACULTATIF N° 1
Terminale spé M5
Jeudi 16 septembre

EXERCICE 1. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété suivante : $P_n : \quad 2^n > n^2$

① Pour quelles valeurs de n l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est-elle vraie ?

② Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

EXERCICE 3. Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

① Pour tout $n \geq 2$, on considère la propriété :

$$P(n) : \quad n \text{ points distincts du plan sont toujours alignés}$$

② Initialisation : $P(2)$ est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.

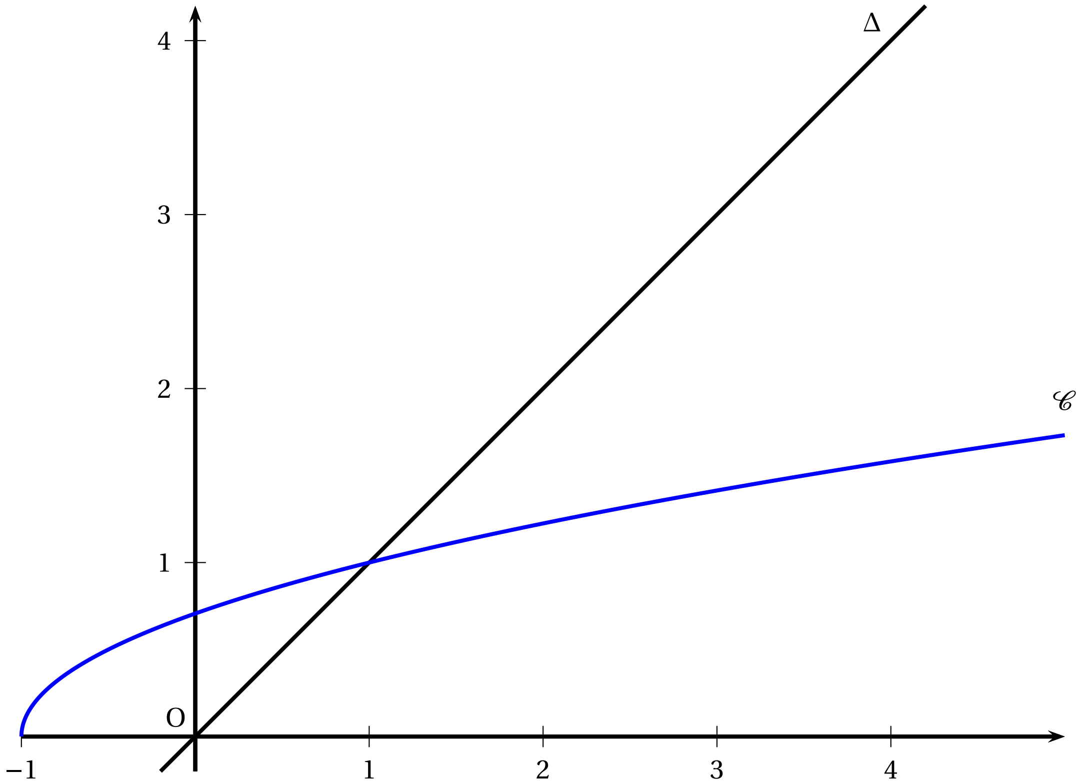
③ Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie et on va démontrer $P(n+1)$.
Soient donc $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ des points distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite d, et $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite d'. Les deux droites d et d' ayant $n-1$ points communs $A_2, \ldots, A_n$ sont confondues. Donc $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés, ce qui montre l'hérédité de la propriété.

④ Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Tournez la page

EXERCICE 4. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



① (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

(b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

② Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

③ En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

④ En constatant que $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \iff (u_{n+1})^2 = \dfrac{1+u_n}{2}$ car $u_{n+1} \geq 0$ et en utilisant les règles d'opérations sur les limites, déterminer ℓ.

EXERCICE 5. La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6} \end{cases}$

① (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $1 < u_n < 3$

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

② On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

(b) Quelle est la limite de (v_n) ?

③ Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n.
En déduire le comportement à l'infini de u_n